V Міський турнір юних математиків, 2010 рік
Завдання для математичного бою (2)

1. Найдите наибольшее значение выражения

$$\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z.$$

2. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Пусть U и V – центры описанных окружностей около треугольников ABE и CDE соответственно, а M и N – точки пересечения высот этих треугольников. Докажите, что точка E лежит на прямой UN тогда и только тогда, когда она лежит на прямой VM.

3. Докажите, что для любых неотрицательных вещественных a, b, c верно неравенство

$$4(\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{b^3c^3} + \sqrt{c^3a^3}) \leq 4c^3 + (a+b)^3.$$

4. Дан треугольник ABC. Из центра I его вписанной окружности опустили перпендикуляр IP на прямую, проходящую через вершину A и параллельную стороне BC. Касательная ко вписанной окружности, параллельная BC, пересекает стороны AB и AC в точках Q и R соответственно. Докажите, что $\angle QPB = \angle RPC$.

5. На плоскости дано несколько кругов, занимающих площадь 1. Докажите, что можно выбрать несколько непересекающихся кругов, площадь которых не меньше $1/9$.

6. Пусть a, b и c — попарно взаимно простые натуральные числа. Найдите все возможные значения выражения $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$, если известно, что это число целое.

7. Каково наименьшее значение n, при котором для любого набора из n точек с целыми координатами на плоскости найдутся три, образующие треугольник целой площади (три точки, лежащие на одной прямой, мы считаем вершинами треугольника площади 0).

8. Множество значений многочлена $Q(x)$ в целых точках содержит все числа Фибоначчи, а все его коэффициенты целые. Найдите все такие многочлены $Q(x)$. (Последовательность чисел Фибоначчи $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ задается условиями $F_0 = F_1 = 1$ и $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ при всех натуральных k.)