

V Міський турнір юних математиків, 2010 рік
Завдання для математичного бою (3)

1. Действительные числа x , y и z , не все равные между собой, удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = k \\ y + \frac{1}{z} = k \\ z + \frac{1}{x} = k. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения k .

2. Каково наименьшее значение n , при котором для любого набора из n точек с целыми координатами на плоскости найдутся три, образующие треугольник целой площади (три точки, лежащие на одной прямой, мы считаем вершинами треугольника площади 0).

3. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Пусть U и V – центры описанных окружностей около треугольников ABE и CDE соответственно, а M и N – точки пересечения высот этих треугольников. Докажите, что точка E лежит на прямой UN тогда и только тогда, когда она лежит на прямой VM .

4. Докажите, что уравнение

$$2^x + 13^y = 19^z$$

не имеет решений в целых числах.

5. Три окружности попарно касаются внешним образом и имеют общую касательную. Радиусы двух из этих окружностей равны r_1 и r_2 . Найдите радиус третьей окружности.

6. При каком действительном значении x выражение

$$x^2(4^x - 6 \cdot 2^x + 4) + 2^x(x^4 + 1)$$

принимает наименьшее значение?