V Міський турнір юних математиків, 2010 рік
Завдання рейтингової олімпіади

1. Сумма первого и второго членов геометрической прогрессии равна 21, а сумма третьего и четвёртого членов равна 84. Найдите сумму второго и третьего членов этой прогрессии.

2. Решите уравнение: $2x^2 - 3x = 2x\sqrt{x^2 - 3x} + 1$.

3. При каких значениях параметра k уравнение

$$|x-1| + |x+1| = k(x+2) + 2$$

а) имеет бесконечное множество решений;
б) не имеет решений?

4. Найдите все пары положительных чисел x и y, для которых справедливо неравенство

$$x^{2y-1} > x^{y^2}.$$

5. В треугольнике ABC ($AB \neq AC$) расстояние от вершины A до точки пересечения высот равно радиусу окружности, описанной вокруг этого треугольника. Найдите величину угла A.

6. Решите уравнение в целых числах: $(a^2 - b^2)^2 = 1 + 16b$.

7. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{26}{9} \\ \sqrt{y} - \dfrac{1}{z} = \dfrac{26}{9} \\ \sqrt{z} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{26}{9}. \end{cases}$$

8. Последовательность a_n натуральных чисел удовлетворяет соотношению

$$a_{n+3} = a_{n+2}(a_{n+1} + a_n), \quad n \geq 1.$$

Известно, что $a_6 = 144$. Найдите a_7.