Додаток
до листа ДНУ
«Інститут модернізації змісту освіти»
від 01.06.2018 № 22.1/10 - 1724

XXI ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ ІМЕНІ ПРОФЕСОРА М. Й. ЯДРЕНКА

Завдання для відбіркових етапів турніру*

Дорогі друзі — юні шанувальники математики!

Пропонуємо Вам для розв'язання комплект завдань турніру.

Деякі із задач, що пропонуються нижче, досить складні і не обов'язково повинні бути розв'язані повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У певних ситуаціях вашій команді буде варто поставити й розв'язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Усе це є важливим елементом турнірної стратегії, оскільки дає підстави для цікавих і корисних наукових дискусій. Задачі, які видаються занадто простими, варто спробувати узагальнити: це завжди високо оцінюється журі Турніру (нехтування ж можливостями узагальнення інколи призводить до втрати балів). Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!

1. «Чарівні сни»

а) Алісі якось наснилися 2018 гномів, що стояли по колу. Кожен із гномів мав спочатку деяку парну (але, можливо, нульову) кількість цукерок. Далі сталося таке: усі гноми в один і той самий момент поділили свої цукерки на дві однакові частини та віддали одну частину своєму сусідові зліва, а іншу — своєму сусідові справа. У підсумку в деякого гнома опинилася 1 цукерка, у наступного за годинниковою стрілкою — 2 цукерки, у наступного — 3 цукерки і т. д.; в останнього (того, що стояв перед першим гномом) стало, відповідно, 2018 цукерок. Чи могло таке статися насправді?

б) Наступної ночі Алісі наснилися 1009 гномів, що так само стояли по колу та ділилися цукерками з сусідами. У підсумку в одного з гномів стало 2 цукерки, в наступного за годинниковою стрілкою — 4 цукерки, в наступного за ним — 6 цукерок і т. д.; в останнього гнома, таким чином, знову опинилося 2018 цукерок. Чи міг новий сон Аліси бути правдою?

---

* За цими задачами будуть проведені чвертьфінальні та півфінальні бої фінального етапу XXI Всеукраїнського турніру юних математиків. Для проведення міжшкільних, районних, міських та обласних етапів турніру відповідні журі й оргкомітети можуть частково змінювати запропонований перелік задач.

2. «Дивна таблиця»

У верхньому рядку та лівому стовпці таблиці 2018×2018 проставлено одиниці. Число у будь-якій іншій комірці таблиці дорівнює сумі всіх чисел, що стоять водночас ліворуч і вище від цієї комірки.

а) Знайдіть усі комірки, числа в яких націло діляться і на свого сусіда зверху, і на свого сусіда ліворуч.

б) Знайдіть усі комірки, числа в яких націло ділять і свого сусіда знизу, і свого сусіда праворуч.

3. «Арктангенс».

а) Знайдіть усі натуральні числа p, q, що задовольняють рівняння

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{p}+\operatorname{arctg}\frac{1}{q}=\frac{\pi}{4}.$$

б) Знайдіть усі натуральні числа p, q, r, що задовольняють рівняння

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{p}+\operatorname{arctg}\frac{1}{q}+\operatorname{arctg}\frac{1}{r}=\frac{\pi}{4}.$$

в) Доведіть, що множина всіх натуральних розв’язків p, q, r, k рівняння

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{p}+\operatorname{arctg}\frac{1}{q}+\operatorname{arctg}\frac{1}{r}+\operatorname{arctg}\frac{1}{k}=\frac{\pi}{4}.$$

є скінченною.

4. «Зсув напівпростих чисел»

а) Нехай $x=3p$, $x+1=2q$, $x+N=3r$, $x+N+1=2s$, де p, q, r, s – деякі прості числа, N – натуральне число. Якого найменшого значення може набувати число N?

б) Нехай $y=2p$, $y+1=3q$, $y+N=2r$, $y+N+1=3s$, де p, q, r, s – деякі прості числа, N – натуральне число. Доведіть, що $N\geq 12$.

в) Чи існує таке число y, якщо $N=12$?

5. «Діофантове рівняння»

Для натуральних m, n розглянемо рівняння

$$\left(nx^2+1\right)\left(my^2+1\right)=\left(m+n\right)z^2+1$$

у натуральних числах x, y, z.

а) Доведіть, що існує нескінченно багато пар (m, n) взаємно простих чисел, більших 1, для яких це рівняння має розв’язок.

б) Доведіть, що рівняння не має розв’язків для $m=n=2$.

6. «Фібоначчева система»

Числа Фібоначчі визначаються рівностями: $F_1 = F_2 = 1,\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Для кожного натурального числа n розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} F_n x + F_{n+1} y^2 = F_{n+2} z^3, \\ F_n y + F_{n+1} z^2 = F_{n+2} x^3, \\ F_n z + F_{n+1} x^2 = F_{n+2} y^3. \end{cases}$$

7. «Біноміальна нерівність»

Нехай $N > m > k$ – натуральні числа.

а) Доведіть, що для будь-якого натурального числа $p \geq \dfrac{N+m}{2}$ справедлива нерівність

$$C_m^k C_{m+1}^k \ldots C_N^k \leq \left(C_p^k\right)^{N-m+1}. \qquad (1)$$

б) Доведіть, що знайдеться така незалежна від N, m, k стала $a > 2$, що нерівність (1) виконується для всіх натуральних чисел $p \geq \dfrac{N+1}{a} \cdot \left(\dfrac{N+1}{m}\right)^{\frac{1}{N-m+1}}$.

Тут C_n^k позначає кількість сполучень з n елементів по k.

8. «Скрізь 11»

Площину розбили на одиничні квадратики й у кожен квадратик записали по одному натуральному числу. Після цього для кожного квадратика порахували різницю: добуток чисел, записаних у сусідніх з ним квадратиках зліва та справа, мінус добуток чисел, записаних у сусідніх з ним квадратиках знизу та зверху. Чи могло статися так, що усі такі різниці дорівнюють 11?

9. «Еквівалентні трійки»

Назвемо дві різні трійки $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ та $b_1 \leq b_2 \leq b_3$ натуральних чисел *еквівалентними*, якщо $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$ та $a_1 a_2 a_3 = b_1 b_2 b_3$.

а) Доведіть, що існує нескінченна кількість пар еквівалентних трійок таких, що жодна пара не утворюється з іншої пари множенням усіх шести елементів на одне й те ж число.

б) Знайдіть усі натуральні числа M, для яких існують дві еквівалентні трійки натуральних чисел $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ та $b_1 \leq b_2 \leq b_3$ такі, що $\max\{a_3, b_3\} = M$.

10. «Цікаві підмножини»

Знайдіть кількість непорожніх підмножин множини $\{1,\ 2, \ldots,\ 1009\}$ із сумою елементів, що ділиться на 2018.

11. «Ноутбук із фільмами»

20 однокласників написали списки по 5 фільмів, які їм подобаються. З'ясувалось, що будь-які два списки мають не більше ніж m однакових фільмів. Класний керівник завантажив всі ці фільми на ноутбук. Яка мінімальна кількість фільмів може бути на ноутбуку, якщо а) $m = 1$; б) $m = 2$?

12. «Групи елементів»

Дано множину із $2n$ елементів. Розглядаються всі можливі групи з n елементів цієї множини. Із них потрібно вибрати рівно половину груп так, щоби кожен елемент входив рівно в половину з обраних груп, причому будь-які дві вибрані групи мали хоча б по одному спільному елементу. Чи можливо це, якщо: а) $n = 3$, б) $n = 8$, в) $n = 9$?

13. «Шерхіт горіхів»

Андрій, Богдана і Василь сидять за круглим столом і їдять горіхи. Спочатку всі горіхи у Андрія. Він ділить їх порівну між Богданою і Василем, а залишок (якщо він є) з'їдає. Потім усе повторюється: кожен наступний (за годинниковою стрілкою) ділить ті горіхи, які зараз у нього, порівну між сусідами, а залишок (якщо він є) з'їдає. Спочатку горіхів було багато (більше 3). У деякий момент часу виявилось, що з'їли більше половини горіхів. Скільки горіхів було спочатку?

14. «Двокольорова шоколадка»

У прямокутній шоколадній плитці розміру m на n є дольки двох кольорів – білі й чорні. Ліва верхня долька завжди чорна, права нижня – завжди біла; кольори інших дольок задаються довільно. Ганнуся й Петрик грають у таку гру. Вони почергово відрізають від шоколадки шматки Г-подібним ножем і з'їдають їх. Ніж не можна повертати; кожним ходом гравець забирає певну дольку і все (в умовному прямокутнику), що знаходиться правіше та нижче від неї. Починає гру Ганнуся. Програє той, хто перший з'їсть чорну дольку. Доведіть, що при довільних розмірах шоколадки й довільному її розфарбуванні Ганнуся має виграшну стратегію.

15. «Шахова композиція»

Під час шахової партії залишилося п'ять фігур (або пішаків) на клітинках a1, b1, b5, c2, c4. Ганнуся подивилася на шахівницю й запитала, чий хід. Отримавши відповідь, вона змогла визначити останній хід кожного із суперників. Визначте, які фігури стоять на вказаних клітинках.

16. «Побудова трикутника»

Нехай K, T – точки дотику вписаного та зовнівписаного кіл до сторони BC трикутника ABC, M – середина сторони BC. Побудуйте циркулем і лінійкою трикутник ABC за променями AK та AT (на них точки K, T не відмічено) та точкою M.

17. «І знову будуємо трикутник»

Побудуйте циркулем і лінійкою трикутник ABC за сторонами b, c та відрізком AI, де I – центр вписаного кола цього трикутника.

18. «Чотири кола»

У гострокутному трикутнику ABC провели висоту AH. На відрізках AB, BH, CH та AC як на діаметрах побудовані кола ω_1, ω_2, ω_3 та ω_4 відповідно. Окрім точки H, кола ω_1 та ω_3 перетинаються в точці P, а кола ω_2 та ω_4 – в точці Q. Прямі BQ та CP перетинаються в точці N. Доведіть, що ця точка лежить на середній лінії трикутника ABC, що паралельна до BC.

19. «Відрізки всередині кола»

Усередині кола діаметра 1 розміщено декілька відрізків, сумарна довжина яких дорівнює 30. Довжини відрізків та їх кількість можуть бути будь-якими, відрізки можуть перетинатися чи торкатися кола. Чи може так трапитись, що жодна пряма не перетинає більше, ніж: а) 17, б) 25 відрізків?

20. «Обмін інформацією»

Грають Ганна й Петрик. Вони мають симетричну монету, при підкиданні якої випадає герб чи решка з однаковою ймовірністю. Ганна наодинці підкидає монету n разів ($n \geq 2$ – фіксоване) і називає Петрику якесь число i, $1 \leq i \leq n$. Далі Петрик підкидає монету n разів і називає якесь число j, $1 \leq j \leq n$. Вони виграють, якщо у Ганни на j-му підкиданні випало те саме, що у Петрика на i-му підкиданні. Чи можуть вони грати так, щоб вигравати з імовірністю, більшою за $\frac{1}{2}$?

***

Матеріали для проведення відбіркових етапів турніру підготували:
І. Г. Величко, Р. В. Дмитришин, С. І. Доценко, В. М. Журавльов, А. І. Казмерчук, О. Г. Кукуш, О. О. Курченко, І. А. Кушнір, М. П. Мороз, Д. П. Мисак, А. Д. Ніколаєв, О. Б. Панасенко, В. М. Радченко, М. М. Рожкова, П. І. Самовол, П. Г. Стеганцева, О. К. Толпиго, І. В. Федак, А. М. Фролкін, Г. М. Шевченко.